

# O Dilema de Abraham-Minkowski

Camila Beli<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo*

O Dilema de Abraham-Minkowski surgiu no início do século XX quando Abraham e Minkowski obtiveram resultados diferentes para o momento eletromagnético em um meio dielétrico transparente. Ao considerar um único fóton, as expressões diferem, respectivamente por serem diretamente e inversamente proporcionais ao índice de refração do meio. Após mais de 100 anos, houve grande desenvolvimento teórico e diversos experimentos realizados, hora corroborando com um momento, hora com outro. Porém, ainda não há uma resposta definitiva e unânime a cerca do tema. No presente trabalho será feita uma breve introdução teórica, também serão apresentados alguns trabalhos teóricos e experimentais realizados ao longo do século e, por fim, uma conclusão.

## I. INTRODUÇÃO

### A. As Equações de Maxwell no vácuo

A teoria do eletromagnetismo, como é entendida atualmente, surgiu dos experimentos de Michael Faraday, que sugeriam um campo eletromagnético, e o uso de equações diferenciais de James C. Maxwell. Tais equações descrevem como cargas produzem campos, como variações temporais de campos elétricos  $\mathbf{E}$  produzem campos magnéticos  $\mathbf{B}$ , e vice-versa. Reciprocamente, a força de Lorentz mostra como os campos afetam as cargas[1]. Estas equações são apresentadas abaixo:

$$\text{i} . \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\text{ii} . \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{iii} . \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\text{iv} . \nabla \times \mathbf{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\text{v} . \mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ (Força de Lorentz)}$$

As equações de Maxwell são formuladas de modo que os campos elétricos, magnéticos, e ondas eletromagnéticas possam se propagar no vácuo. Partindo das equações acima, podemos definir o fluxo de energia eletromagnética  $\mathbf{S}$ , denominado vetor de Poynting, a densidade de energia eletromagnética  $u$ , e a densidade de momento dos campos  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1)$$

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \quad (2)$$

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{S} \quad (3)$$

### B. Equações de Maxwell macroscópicas

Ao considerarmos ondas eletromagnéticas propagando em meios dielétricos, deve-se levar em conta como cargas e correntes livres ou localizadas deste meio interagem com os campos. Assim, numa visão macroscópica é necessário considerar o comportamento global dos campos e das cargas do meio. Para isso, é necessário então definir as grandezas macroscópicas de polarização  $\mathbf{P}$  e magnetização  $\mathbf{M}$ .

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (4)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} \quad (5)$$

Onde  $\mathbf{D}$  é campo de deslocamento elétrico e  $\mathbf{H}$  é o campo de excitação magnética. Podemos agora escrever as equações de Maxwell macroscópicas que correspondem às equações para o vácuo complementadas pelas equações que caracterizam o meio [2]. Assim,

$$\text{i} . \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\text{ii} . \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{iii} . \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}$$

$$\text{iv} . \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Considerando meios não dispersivos e dada as equações acima, podemos novamente definir a densidade de energia eletromagnética  $u$  e o vetor de Poynting  $\mathbf{S}$ .

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (6)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (7)$$

### C. O Dilema

Tanto Minkowski como Abraham concordam com (6) e (7). O dilema surge ao descreverem a densidade de momento de uma onda eletromagnética, uma vez que cada um a definiu, respectivamente, como

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (8)$$

$$\mathbf{p}_A = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (9)$$

Sendo  $\mathbf{p}_M$  a densidade de momento de Minkowski e  $\mathbf{p}_A$  a densidade de momento de Abraham. Essa diferença é tanto quantitativa como qualitativa. Ao considerar um fóton entrando em um meio dielétrico, Minkowski usou das relações quânticas para a energia dada por  $E = h\nu$ , e da relação de de Broglie para o momento  $p = \frac{h}{\lambda}$ , sendo  $h$  a constante de Planck. Assim,

$$\mathbf{p}_M = n\hbar\mathbf{k} \quad (10)$$

Onde  $k$  é o número de onda. Já Abraham, considerou a energia dada pela relação de Einstein  $E = mc^2$  e o momento cinético  $p = mv$ . Sabendo que a velocidade de fase em meio dielétricos diminui com o índice de refração,  $v = c/n$ , temos

$$\mathbf{p}_A = \frac{\hbar\mathbf{k}}{n} \quad (11)$$

O momento de Minkowski mostra o aspecto ondulatório do fóton, enquanto o de Abraham enfatiza o aspecto corpuscular. Essa diferença gerou uma discussão que se estendeu ao longo dos mais de 100 anos desde que a controvérsia surgiu, envolvendo diferentes tipos de experimentos, mas nenhum capaz de provar que um dos momentos está errado.

## II. DISCUSSÕES E EXPERIMENTOS REALIZADOS

### A. Discussões Teóricas

No começo a comunidade científica era mais favorável a teoria de Minkowski. Em 1950, Laue demonstrou um requisito limitante que deveria ser satisfeito pelas propriedades de transformação dos componentes do tensor de momento-energia para uma onda eletromagnética. De acordo com sua hipótese, mostrou que o tensor que descrevia o momento de Minkowski satisfazia o requisito, enquanto o de Abraham não. Independentemente, Moller desenvolveu considerações análogas que também rejeitavam o tensor de Abraham [3].

O critério de Laue foi amplamente aceito na literatura da época como prova de que o tensor de Minkowski era o correto. Estas conclusões foram sustentadas por experimentos da época[4, 5], e assim foi mantido até por volta de 1970 onde o assunto ganhou força novamente.

Em 1973, Skobel'tsyn apresentou um forte ataque ao critério de Laue ao demonstrar um critério alternativo no qual o tensor de Abraham era satisfeito e mostrou que o experimento realizado por Jones e Richard também poderia apoiar a teoria de Abraham[6].

Em 1971, Blount introduziu o conceito de pseudomomento e identificou através da relatividade, argumentos macroscópicos de que a relação de Abraham corresponde à densidade de momento enquanto a de Minkowski relaciona-se com a densidade de pseudomomento[3]. Este conceito mudou o rumo da controvérsia de achar qual momento é o certo ou errado, para o de identificar qual o momento envolvido nos experimentos e a aplicabilidade de cada.

Ao longo do século muitos tentaram resolver o problema propondo novos tensores, usando formalismo como o Lagrangiano[7], feixes de Laguerre-Gauss, força Lorentziana[3] etc. Muitos também alegaram resolver o dilema, porém, nunca chegou-se de fato a um consenso no meio científico a respeito do dilema.

### B. Trabalhos Experimentais

- G. Barlow, 1912: Documentado como a primeira tentativa de se medir a pressão de radiação. O experimento consistia em aplicar um feixe de que se propagava obliquamente dentro de um cubo dielétrico composto de vidro crown, e medir o torque resultante. O cubo se encontrava mergulhado em gás de hidrogênio em baixa temperatura, para minimizar correntes de convecção [4]. O objetivo do experimento era verificar a teoria do vetor de Poynting, a qual supostamente sustenta o momento de Minkowski dentro de meios dielétricos.
- Jones & Richards, 1953: O propósito era de investigar se a força exercida pela luz sobre um objeto opaco era proporcional ao índice de refração do meio no qual o corpo era imerso. Para mostrar que a pressão de radiação variava com o índice de refração do meio, o aparato experimental foi montado em um recipiente que poderia ser preenchido com vários fluidos diferentes. Tal experimento mostrou que os resultados eram mais facilmente explicados ao se atribuir a densidade de momento definida por  $\frac{1}{c} \mathbf{D} \times \mathbf{B}$  para um feixe de luz se propagando através de um fluido refrativo[5].
- Ashkin & Dziedzic, 1974: Usando um laser de íons de argônio, investigaram a pressão de radiação em esferas dielétricas imersas em líquidos e a pressão na interface líquido-ar devido ao feixe laser. Seguindo a formulação de Minkowski, o momento da

luz aumenta ao entrar no líquido e uma força deve atuar na superfície, fazendo que haja uma curvatura para fora na mesma, para que assim tenha-se a conservação de momento. Tal efeito foi observado durante o experimento, corroborando mais uma vez com a teoria de Minkowski [3].

- Walker, Lahoz & Walker, 1975: O experimento consistia em suspender um disco de cerâmica de Bário-Titânio - material escolhido devido a sua alta constante dielétrica - em um pêndulo de tensão pendurado por uma fina fibra de tungstênio, sendo o disco localizado entre os polos de um forte eletroíma. O experimento forneceu uma verificação direta da força de Abraham, e mostrou que o tensor de Minkowski era inadequado para descrever os resultados [8].
- G. K. Campbell et al, 2005: O objetivo era medir o recuo de um condensado de Bose-Einstein a medida que os fótons são refletidos de sua superfície. Os resultados mostraram que o momento de recuo dos átomos causado pela absorção de um fóton é  $n\hbar k$ , onde  $n$  é o índice de refração do gás e  $k$  é o vetor de onda do fóton no vácuo, novamente sendo um resultado favorável à Minkowski.

- W. She, J. Yu and R. Feng, 2008: Observaram uma força de pressão na face final de um filamento de sílica nanométrica. Tal força foi exercida pela luz ao sair da fibra. Através dos resultados experimentais e resultados numéricos de análises estatísticas, verificou-se que o experimento estava de acordo com o momento de Abraham [9].

### III. CONCLUSÃO

Através da relatividade geral, alguns teóricos mostraram que as fórmulas de Abraham e Minkowski podem ser derivadas e podem ser aplicadas sob condições diferentes. Outros trabalhos argumentam que essas duas fórmulas correspondem a quantidades essencialmente diferentes, sendo a de Abraham correspondente ao momento do próprio fóton, e o de Minkowski, o momento do fóton somado ao do meio que o circunda. Assim, para se ter certeza de qual momento se trata em uma medida experimental não é algo trivial.

Há também aqueles que alegam terem resolvido o dilema, porém, não se tem uma visão unânime do meio científico a respeito do tema. Portanto, apesar de mais de um século de discussões, desenvolvimentos teóricos e experimentais, o debate sobre este tema ainda parece estar longe do fim.

- 
- [1] D. J. Griffiths, *Eletrodinâmica*, 3rd ed. (Pearson Education do Brasil, Avenida Santa Marina, 1193, São Paulo - SP - Brazil, 2011).
- [2] P. W. Courteille, *Eletrodinâmica - Eletricidade, Magnetismo e Radiação* (2018).
- [3] P. Bowyer, *The momentum of light in media: the Abraham-Minkowski controversy*, Master's thesis, School of Physics Astronomy, Southampton (2005).
- [4] G. Barlow, The Royal Society **LXXXVII-A** (1912).
- [5] R. Jones and J. C. S. Richards, The Royl Society , 480 (1953).
- [6] D. V. Skobel'tsyn, Soviet Physics Uspekhi , 253 (1973).
- [7] D. Nelson, Physical Review A **44**, 3985 (1991).
- [8] G. B. Walker, D. G. Lahoz, and G. Walker, Canadian Journal of Physics **53**, 2577 (1975).
- [9] W. She, J. Yu, , and R. Feng, Physical Review Letters **101**, 243601 (2008).